Lycée Jean Mermoz

DEVOIR COMMUN N°1
DE
MATHÉMATIQUES

SERIE S

Durée de l'épreuve : 4 heures

Samedi 13 décembre 2014

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6
L'annexe, page 6, est à rendre avec la copie.

L'usage des calculatrices est autorisé selon les termes de la circulaire n°99-186 du 16 novembre 1999.

Le candidat doit traiter les quatre exercices.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies

<u>Exercice 1</u>: (5 points)

1) On considère l'algorithme donné en **annexe 1**.Exécuter cet algorithme pour la valeur $n = 4$ et compléter le tableau associé à cet algorithme figurant sur la même annexe.

2) On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{2u_n + 1}$$

.

On admet que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.

a) Que représentent pour la suite (u_n), les valeurs de la deuxième ligne du tableau figurant en annexe 1.

b) Vérifier que si n est l'un des entiers 0, 1, 2, 3, 4 alors $u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^n$.

c) Établir que pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} - 1 = \frac{-u_n + 1}{2u_n + 1}$$

.

d) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^n$.

3) Pour tout entier naturel n, on pose

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$$

a) Établir que pour tout entier naturel n,

$$v_{n+1} = \frac{-u_n + 1}{3u_n + 3}$$

b) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{3}$.

En déduire l'expression de $v_n$en fonction de n.

c) Démontrer que pour tout entier naturel n,

$$u_n = \frac{1 + v_n}{1 - v_n}$$

d) Exprimer u_n en fonction de n et déterminer la limite de la suite (u_n).

<u>Exercice 2</u> : (5 points)

Les 300 personnes travaillant dans un immeuble de bureaux de trois niveaux ont répondu aux deux questions suivantes :

- « À quel niveau est votre bureau ? »
- « Empruntez-vous l'ascenseur ou l'escalier pour vous y rendre ? »

Voici les réponses :

- 225 personnes utilisent l'ascenseur et, parmi celles-ci, 50 vont au 1er niveau, 75 vont au 2ème niveau et 100 vont au 3ème niveau.
- Les autres personnes utilisent l'escalier et, parmi celles-ci, un tiers va au 2ème niveau, les autres vont au 1er niveau.

On choisit au hasard une personne de cette population.

On pourra considérer les évènements suivants :

- N_1: « La personne va au premier niveau. »
- N_2: « La personne va au deuxième niveau. »
- N_3: « La personne va au troisième niveau. »
- E : « La personne emprunte l'escalier. »

1) Traduire l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.

2) a) Montrer que la probabilité que la personne aille au 2ème niveau par l'escalier est égale à $\frac{1}{12}$.

b) Montrer que les évènements N_1, N_2 et N_3 sont équiprobables.

c) Déterminer la probabilité que la personne emprunte l'escalier sachant qu'elle va au 2ème niveau.

3) On interroge désormais 20 personnes de cette population. On suppose que leurs réponses sont indépendantes les unes des autres.

On appelle X la variable aléatoire qui, aux 20 personnes interrogées, associe le nombre de personnes allant au 2ème niveau.

a) Quelle est la nature de loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X et préciser ses paramètres.

b) Déterminer, à 10^{-4} près, la probabilité que 5 personnes exactement aillent au 2ème niveau.

c) En moyenne sur les 20 personnes, combien vont au 2ème niveau ?

4) Soit n un entier inférieur ou égal à 300. On interroge désormais n personnes de cette population. On suppose que leurs réponses sont indépendantes les unes des autres.

Déterminer, à l'aide de la calculatrice, le plus petit entier n strictement positif tel que la probabilité de l'évènement « au moins un personne va au 2ème niveau » soit supérieure ou égale à 0,99.

<u>Exercice 3</u> : (6 points)

PARTIE A

g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = -\frac{1}{2}e^{-x} - \frac{1}{2}x + 2$$

1) a) Déterminer la limite de g en $+\infty$.

b) Démontrer que la limite de la fonction g en $-\infty$ est $-\infty$.

2) Etudier le sens de variation de g.

3) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0; +\infty[$ dont on donnera un encadrement d'amplitude 10^{-2}.

PARTIE B

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -\frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{2}x + 2$$

1) Déterminer la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

2) Justifier que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3) Montrer, en utilisant la valeur exacte de $f(4)$, que $f(4) < 4$.

4) (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ \quad et \\ u_0 = 0 \end{cases}$

a) Sur le graphique en **annexe 2** on a tracé une partie de la courbe représentative de la fonction f.

Construire sur l'axe des abscisses les cinq premiers termes de la suite (u_n).

b) Quelles conjectures peut-on faire concernant le sens de variation et la convergence de la suite (u_n) ?

5) a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n < u_{n+1} < 4$.

b) Justifier que la suite (u_n) est convergente.

c) On note l la limite de (u_n). Montrer que l est solution de l'équation $g(x) = 0$.
En déduire un encadrement de l d'amplitude 10^{-2} .

d) En utilisant la calculatrice, donner une valeur approchée de l à 10^{-8} près.

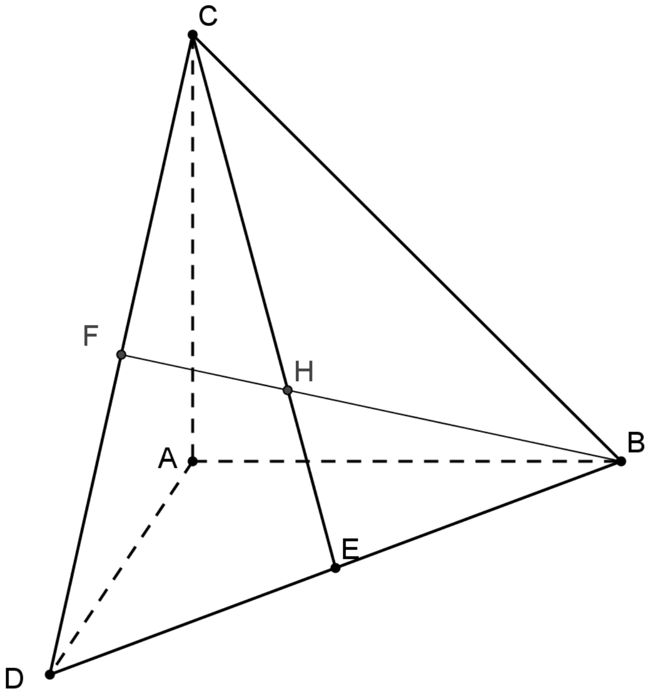
e) Les conjectures faites à la question 4) sont-elles validées ?

<u>Exercice 4</u> : (4 points)

$ABCD$ est un tétraèdre tel que ABC, ACD et ABD soient des triangles rectangles et isocèles tels que :

$$AB = AC = AD = a$$

E et F sont les milieux de $[BD]$ et $[DC]$. H est le point d'intersection des droites (CE) et (BF).



1) Quelle est la nature du triangle BCD ? Justifier votre réponse.

2) a) Montrer que la droite (AB) est orthogonale au plan (ADC).
b) En déduire que les droites (AB) et (DC) sont orthogonales.
c) Justifier que les droites (BF) et (DC) sont perpendiculaires.
d) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète sera prise en compte dans l'évaluation.*
Démontrer que les droites (DC) et (AH) sont orthogonales.

3) a) Montrer que la droite (BD) est orthogonale au plan (ACE).
b) En déduire que les droites (BD) et (AH) sont orthogonales.

4) Démontrer que la droite (AH) est orthogonale au plan (BCD).

Question bonus : (+1 point)

Calculer en fonction de a, la distance AH.

Annexes à rendre avec la copie

Nom et prénom : ....

Annexe 1 : exercice 1 - question 1

Algorithme

Variables
a est un réel
i et n sont des entiers naturels

Début de l'algorithme
Lire n
a prend la valeur 2
Pour i variant de 1 à n faire
a prend la valeur $\frac{a+2}{2a+1}$
Afficher a
Fin pour

Fin algorithme

Tableau associé à l'algorithme

Valeurs de i	1	2	3	4
Nombre affiché par l'algorithme arrondi à 10^{-2}				

Annexe 2 : exercice 3 - question B] - 4) - a)